INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
08.02.2020

Clasa a V-a

1. Iulia și Ștefan au cumpărat de la chioșcul alimentar al școlii patiserie pentru ei și colegi din clasă. Iulia a cumpărat 5 plăcinte cu brânză, 2 ștrudele cu mere, 7 croissante și a plătit 26 lei. Ștefan a cumpărat 3 plăcinte cu brânză, 2 ștrudele cu mere, 4 croissante și a plătit 17 lei. Cât costă fiecare produs de patiserie, dacă o plăcintă cu brânză este de trei ori mai scumpă decât un croissant?

2. a) Fie $a = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{2020}$ și $b = 3^{2021} - 3^{2020} - 3^{2019}$. Arătați că restul împărțirii numărului $14a + 7$ la numărul b este un număr natural pătrat perfect.

b) Fie $a = n^2(n+1)^2 + 1$. Arătați că numărul:
$2016^a + 2017^a + 2018^a + 2019^a$ se divide cu 10.

3. a) Determinați numărul natural $\overline{aa}$ pentru care:
$\overline{aa}^2 + a^b + a^2 + 4 \cdot a : a = 2020$, unde b este număr natural.

b) Determinați numerele naturale x, y, z pentru care:
$7^x + 3^y + 2^z = 293$.

4. Un număr se numește **5 - *puternic*** dacă se scrie ca o sumă de trei puteri consecutive ale lui 5, exponenții puterilor lui 5 fiind numere naturale nenule.

a) Să se determine numerele de trei cifre care sunt **5 – *puternice***.
b) Să se arate că suma primelor 2020 numere **5 – *puternice*** este divizibilă cu 31 și nu este un pătrat perfect.
c) Să se demonstreze că, fiind date trei numere **5 – *puternice***, există două numere dintre acestea al căror produs este un pătrat perfect.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 2 ore.*

Soluţii şi bareme de corectare orientative

Clasa a V-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. 5 plăcinte cu brânză .... 2 ştrudele cu mere .... 7 croissante .... 26 lei;
3 plăcinte cu brânză .... 2 ştrudel cu mere .... 4 croissante .... 17 lei. **(2p)**
Se scad cele două relaţii şi se obţine:
2 plăcinte cu brânză .... 3 croissante .... 9 lei. **(2p)**
Dar o plăcintă este de trei ori mai scumpă decât un croissant, deci
$(6 + 3) = 9$ croissante$= 9$ lei $\Longrightarrow$ 1 croissant $= 1$ leu, 1 plăcintă cu brânză $= 3$ lei,
2 ştrudele cu mere$= 17 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = 4$ lei, deci 1 ştrudel cu mere $= 2$ lei. **(3p)**

2. a) Din $a = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{2020}$ prin înmulţire cu 3 se obţine
$3a = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2021}$ şi prin scăderea relaţiilor, obţinem: $2a = 3^{2021} - 1$, deci
$2a + 1 = 3^{2021}$, iar $14a + 7 = 7 \cdot 3^{2021}$. **(2p)**
Scoţând factor comun pe 3^{2019} se obţine $b = 5 \cdot 3^{2019}$. **(1p)**
Dar $14a + 7 = 63 \cdot 3^{2019} = (5 \cdot 12 + 3) \cdot 3^{2019} = 12b + 3^{2020}$. Cum $3^{2020} < b$ restul împărţirii lui $14a + 7$ la b este $3^{2020} = (3^{1010})^2$, deci pătrat perfect. **(1p)**

b) Produsul a două numere naturale consecutive este număr par, deci $a = M_4 + 1$. **(1p)**
De aici obţinem $U(2016^a) = 6, U(2017^a) = 7, U(2018^a) = 8, U(2019^a) = 9$, **(1p)**
iar $U(2016^a + 2017^a + 2018^a + 2019^a) = U(6 + 7 + 8 + 9) = 0$, deci $2016^a + 2017^a + 2018^a + 2019^a$ este divizibil cu 10. **(1p)**

3. a) Analizând egalitatea constatăm că pentru a obţine rezultatul 2020 trebuie ca $\overline{aa}^2$ să fie cât mai apropiat de 2020.
Dacă $\overline{aa} = 55$, am obţine $55^2 = 3025 > 2020$, de aceea trebuie micşorată valoarea lui a. **(1p)**
Pentru $a = 4$ obţinem $44^2 = 1936$ şi înlocuind obţinem: $44^2 + 4^b + 4^2 + 4 \cdot 4 : 4 = 2020$, de unde avem $1936 + 4^b + 16 + 4 = 2020 \Rightarrow 4^b = 2020 - 1936 - 20 \Leftrightarrow 4^b = 64 \Leftrightarrow 4^b = 4^3 \Rightarrow b = 3$.
Într-adevăr, pentru $b = 3$, obţinem $\overline{aa} = 44$. **(1p)**
Pentru $a \leq 3$, problema nu admite soluţii. **(1p)**

b) 7^x, 3^y şi 293 sunt numere impare, pentru orice numere naturale $x, y \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^z$ este impar $\Rightarrow z = 0 \Rightarrow 7^x + 3^y = 292$, $7^3 = 343 < 292 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2\}$. **(2p)**
Dacă $x = 0 \Rightarrow 3^y = 291$, nu convine.
Dacă $x = 1 \Rightarrow 3^y = 285$, nu convine. **(1p)**
Dacă $x = 2 \Rightarrow 3^y = 243 = 3^5 \Rightarrow y = 5$. Deci soluţia este $x = 2,\ y = 5, z = 0$. **(1p)**

4. Fie A un număr **5 – *puternic***, atunci
$A = 5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} = 5^n(1 + 5 + 5^2) = 5^n \cdot 31, n \in \mathbb{N}^*$. **(1p)**
a) Pentru $n = 1 \Rightarrow A = 5 \cdot 31 = 155$, pentru $n = 2 \Rightarrow A = 25 \cdot 31 = 775$. Pentru $n \geq 3$, se vor obţine numere mai mari de trei cifre ($A > 999$), deci avem doar două soluţii. **(2p)**
b) Suma primelor 2020 numere **5 – *puternice*** este $S = 5 \cdot 31 + 5^2 \cdot 31 + \cdots + 5^{2020} \cdot 31 = 31 \cdot (5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2020}) \vdots 31$. De aici deducem că $31 | S$. Pentru ca S să fie pătrat perfect trebuie ca $31^2 | S$, adică $31 | T$, unde $T = 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2020}$. Suma $T = 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{2020}$ are 2020 termeni şi se poate scrie:

$T = 5 + 5^2(1 + 5 + 5^2) + \ldots + 5^{2018}(1 + 5 + 5^2) = 5 + 5^2 \cdot 31 + \cdots + 5^{2018} \cdot 31$, ceea ce arată 31 nu divide T. **(2p)**

c) Fie $5^a \cdot 31,\ 5^b \cdot 31, 5^c \cdot 31$ trei numere **5 –** ***puternice***. Produsele a câte două dintre ele sunt $5^{a+b} \cdot 31^2, 5^{b+c} \cdot 31^2$ și $5^{c+a} \cdot 31^2$. Dintre numerele $a + b, b + c, c + a$ cel puțin unul este par. Dacă $a + b$ este număr par, avem $5^{a+b} \cdot 31^2 = 5^{2k} \cdot 31^2 = (5^k \cdot 31)^2$, adică este un pătrat perfect. **(2p)**

Inspectoratul Școlar Județean Dolj

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,

Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396

E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
08.02.2020
Clasa a VI-a

1. a) Arătaţi că numărul $n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ ... + \frac{1}{1+2+3+\ ...+2020} + \frac{2}{2021}$ este număr natural.

b) Aflaţi cifrele nenule a şi b pentru care $\frac{\overline{0,a(b)}}{\overline{0,b(a)}} = \frac{a+1}{b+1}$.

2. a) Fie $A = \{n \in \mathbb{N} | 2^{36} < n < 3^{24}\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N} | 2^{48} < n < 3^{32}\}$. Care dintre mulțimile A și B are cardinalul mai mare? (Numărul de elemente al unei mulțimi X reprezintă cardinalul mulțimii X.)

b) Considerăm mulțimile X și Y. Care este cea mai mică sumă a elementelor mulțimii X, dacă sunt satisfăcute următoarele condiții?

i) $X \cap Y = \phi$;

ii) $X \cup Y = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$;

iii) dacă $a + 1 \in X$, atunci $a \in Y$;

iv) card $X \geq 3$ (card X reprezintă numărul elementelor mulțimii X).

3. Fie A, B, C, D, E și F șase puncte coliniare (în această ordine) și un punct $O, O \notin AB$. Arătați că:

a) dacă $2AC = AB + AD$ și $2CF = AF + EF$, atunci $AB \equiv DE$;

b) dacă $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOE \equiv \sphericalangle COF$, iar $[OC$ și $[OD$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$, respectiv $\sphericalangle COE$, atunci $5 \cdot (\sphericalangle COD) = \sphericalangle AOF$.

4. În interiorul unghiului COD se duc semidreptele (OA și (OB astfel încât ($OA \subset \text{Int}(\sphericalangle COB)$ și $OB \subset \text{Int}(\sphericalangle AOD)$. Dacă unghiurile AOB și COD sunt complementare, (OM și (ON sunt bisectoarele unghiurilor COA respectiv BOD, se cere :

a) Arătați că măsura unghiului MON este aceeași, pentru orice unghiuri AOB și COD ce îndeplinesc condițiile ipotezei.

b) Dacă $\sphericalangle COA$, $\sphericalangle BOA$ și $\sphericalangle DON$) sunt invers proporţionale cu numerele 0,25; 0,2 și respectiv 0,1(6), aflaţi măsura unghiului AOB .

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 2 ore.*

Soluții și bareme de corectare orientative

Clasa a VI-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) $n = \frac{1}{\frac{2\cdot 3}{2}} + \frac{1}{\frac{3\cdot 4}{2}} + \ldots + \frac{1}{\frac{2019\cdot 2020}{2}} + \frac{1}{1010} = \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{2}{2020\cdot 2021} + \frac{2}{2021} =$

$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} + \frac{1}{2021}\right) = 1 \in \mathbb{N}$. **(3p)**

b) Condiția din enunț revine la $\overline{a,(b)} \cdot (b+1) = \overline{b,(a)} \cdot (a+1)$, adică la

$\left(a + \frac{b}{9}\right) \cdot (b+1) = \left(b + \frac{a}{9}\right) \cdot (a+1)$, deci $(9a+b) \cdot (b+1) = (9b+a) \cdot (a+1)$,

sau la $\frac{9a+b}{9b+a} = \frac{a+1}{b+1}$. **(2p)**

Folosind proporțiile derivate, deducem că:

$\frac{(9a+b)-(9b+a)}{9b+a} = \frac{(a+1)-(b+1)}{b+1}$, adică $\frac{8(a-b)}{9b+a} = \frac{a-b}{b+1}$ (*). Se vede că orice pereche de cifre identice ($a = b$) satisface relația. **(1p)**

Dacă $a \neq b$, relația (*) se mai scrie $\frac{8}{9b+a} = \frac{1}{b+1}$, adică

$8b + 8 = 9b + a$, deci $a + b = 8$. Obținem, pe lângă perechile deja găsite, soluțiile:

$a = 1, b = 7$; $a = 2, b = 6$; $a = 3, b = 5$; $a = 5, b = 3$; $a = 6, b = 2$ și $a = 7, b = 1$. **(1p)**

2. a) A are $3^{24} - 2^{36} - 1$ elemente, iar B are $3^{32} - 2^{48} - 1$ elemente. **(1p)**

Arătăm că B are cardinalul mai mare, adică $3^{32} - 2^{48} > 3^{24} - 2^{36}$. Această inegalitate se scrie echivalent

$3^{32} - 3^{24} > 2^{48} - 2^{36}$, sau $3^{24}(3^8 - 1) > 2^{36}(2^{12} - 1)$. **(2p)**

Această inegalitate rezultă din înmulțirea inegalităților

$3^{24} = 9^{12} > 8^{12} = 2^{36}$ și

$3^8 - 1 = 9^4 - 1 > 8^4 - 1 > 2^{12} - 1 > 0$. **(1p)**

b $8 \notin X \Rightarrow 8 \in Y$. Pentru ca suma elementelor lui X să fie cel mai mic număr trebuie să avem că $9 \in X$. **(1p)**

Cum X are cel puțin 3 elemente, rezultă celelalte 2 numere din X sunt 11 și 13. Deci, $X = \{9, 11, 13\}$ și $Y = \{8, 10, 12, 14\}$. **(2p)**

3. a) Avem $2AC = AB + AD \Leftrightarrow 2(AB + BC) = AB + (AB + BC + CD) \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = CD$. **(2p)**

Dar $2CF = AF + EF \Leftrightarrow 2(CD + DE + EF) = AB + BC + CD + DE + EF + EF$

$\Rightarrow DE = AB \Rightarrow AB \equiv DE$. **(2p)**

b) Din $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOE \Rightarrow \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOE$. **(1p)**

Din $\sphericalangle BOE \equiv \sphericalangle COF \Rightarrow \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle EOF$. **(1p)**

Deoarece $[OC$ și $[OD$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOD$, respectiv $\sphericalangle COE \Rightarrow$

$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COD \equiv \sphericalangle DOE \equiv \sphericalangle EOF \Rightarrow 5 \cdot (\sphericalangle COD) = \sphericalangle AOF$. **(1p)**

4. a) Notăm $\sphericalangle COM = \sphericalangle MOA = a$, $\sphericalangle AOB) = z$ și $\sphericalangle BON = \sphericalangle DON = b$.

Din ipoteză avem $\sphericalangle COD + \sphericalangle AOB = (2a + z + 2b) + z = 90°$, **(2p)**

de unde obținem $a + b + z = \sphericalangle MON) = 45° =$constantă. **(2p)**

b) $2a, z$ și b sunt invers proporționale cu $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ și $\frac{1}{6}$, $a + z + b = 45°$, deci

$\frac{2a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$. Se obține $\sphericalangle AOB = \frac{225°}{13}$ **(3p)**

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2020

Clasa a VII-a

1.a) Calculaţi partea întreagă şi partea fracţionară a numărului $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$.

b) Dacă $A = \sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{8+2\sqrt{7}}}}}}-1$,

arătaţi că A^2 este număr natural.

2. Determinaţi numerele reale x şi y care verifică egalitatea:

$$\sqrt{4x+4y-1}+\sqrt{2-4x}+5\sqrt{26-4y}=27.$$

3. Se consideră un triunghi ABC şi punctele M pe latura AB, N pe latura AC. Dacă triunghiul AMN este echilateral şi $MB=AC$, arătaţi că triunghiul BNC este isoscel.

4. Laturile opuse AB şi CD ale patrulaterului convex $ABCD$ se intersectează în E, iar laturile AD şi BC se intersectează în F. Se prelungesc segmentele AE, DE, BF, respectiv AF cu segmentele $EH=AB$, $EK=CD$, $FL=BC$, respectiv $FM=DA$, astfel încât $AH \cap DK = \{E\}, AM \cap BL = \{F\}$. Arătaţi că $HKLM$ este paralelogram.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

BAREM DE CORECTARE

Clasa a VII-a

Problema 1	
a) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{7}+1$ $3<\sqrt{7}+1<4$ $\{\sqrt{7}+1\}=\sqrt{7}+1-3=\sqrt{7}-2$	1p 1p 1p
b) $\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{8+2\sqrt{7}}}=\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{7}+1}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{7}+1.$ Aplicăm succesiv acest rezultat pentru fiecare radical. Rezultă $A=\sqrt{7}$ și $A^2=7$.	2p 1p 1p
TOTAL	**7p**
Problema 2	
Notăm $a=\sqrt{x+y-\frac{1}{4}}, b=\sqrt{2-4x}$ și $c=\sqrt{26-4y}$ $2a+b+5c=27$ $4a^2+b^2+c^2=27$ $(2a-1)^2+(b-1)^2+(c-5)^2=0.$ $\Rightarrow x=y=\frac{1}{4}$	1p 1p 2p 2p 1p
TOTAL	**7p**
Problema 3	
Construim $BD\perp AC$ $m(\angle ABD)=30^o$ $AD=\frac{AB}{2}$ Notăm $AC=BM=x$ și $AM=AN=MN=y, AD=\frac{x+y}{2}$ $DN=AD-AN=\frac{x-y}{2}$ $DN=\frac{CN}{2}$, adică D este mijlocul segmentului CN *BD* este mediatoarea segmentului *CN*, adică ΔBNC este isocel	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p
TOTAL	**7p**
Problema 4	
Construim paralelogramul *ABOD* $\Delta EHK\equiv\Delta DOC\ (L.U.L)$ *HK*=*CO*, $HK \parallel CO$ *ML*=*CO* și $ML\parallel CO$ *ML*=*HK* și $ML\parallel HK$ *HKLM* este paralelogram	2p 1p 1p 1p 1p 1p
TOTAL	**7p**

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2020

Clasa a VIII-a

1. Fie mulțimile $A_n = \{x \in \mathbb{R} | \, |x + 2n - 7| \leq 3n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.
   a) Să se scrie sub formă de interval mulțimile A_0 și A_1.
   b) Există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât A_n să aibă 4023 de elemente din mulțimea numerelor întregi?

2. Dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât
$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 20 = 4x + 12y + 24z,$$
arătați că $x \in [-1,5], y \in [0,3]$ și $z \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$.

3. Fie prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu muchia bazei $AB = l$ și înălțimea $AA' = l\sqrt{3}$. Notăm cu N mijlocul lui $[CC']$.
   a) Demonstrați că dreptele BF' și ND sunt perpendiculare.
   b) Aflați distanța dintre BF' și ND, pentru $l = 12$ cm.

4. Fie S o submulțime a mulțimi $M = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 2017\}$ astfel încât pentru orice $a, b \in S$ să avem $|a - b| \notin \{4,7\}$. Aflați numărul maxim de elemente pe care îl poate avea submulțimea S.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte
Timp de lucru: 3 ore

BAREM DE CORECTARE

Clasa a VIII-a

Problema 1	
a) $A_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid \lvert x-7\rvert \le 1\} \Leftrightarrow A_0 = [6,8]$	1p
$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \lvert x-5\rvert \le 4\} \Leftrightarrow A_1 = [1,9]$	1p
$b) A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \lvert x+2n-7\rvert \le 3n+1, n \in \mathbb{N}\}$	1p
$x \in [-5n+6, n+8]$	1p
$card(A_n \cap \mathbb{Z}) = n+8+5n-6+1 = 6n+3$	1p
$6n+3 = 4023$, $n = 670$.	2p
TOTAL	**7p**

Problema 2	
$x^2+4y^2+9z^2+20 = 4x+12y+24z$ $(x-2)^2+(2y-3)^2+(3z-4)^2 = 9$	2p
$\lvert x-2\rvert \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x-2 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le x \le 5 \Leftrightarrow x \in [-1,5]$	1p
$\lvert 2y-3\rvert \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 2y-3 \le 3 \Leftrightarrow 0 \le y \le 3 \Leftrightarrow y \in [0,3]$	2p
$\lvert 3z-4\rvert \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 3z-4 \le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x \le \frac{7}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$	2p
TOTAL	**7p**

Problema 3	
a) Fie M mijlocul lui BB' $\Rightarrow MN \| BC \| AD \Rightarrow A, D, N, M$ sunt coplanare. Intersecția dintre planele (BFF') și (ADN) este dreapta MQ. $BB'F'F$ pătrat. În pătratul $BB'F'F$ avem $MQ \| B'F$.	1p
$AD \perp (B'BF), BF' \subset (B'BF) \Rightarrow AD \perp B'F$ $BF' \perp MQ, BF' \perp AD \Rightarrow BF' \perp (NAD), ND \subset (NAD) \Rightarrow BF' \perp ND$	1p
b) Fie $\{T\} = BF' \cap MQ$. Fie $TS \perp ND$. Cum $BF' \perp (NAD) \Rightarrow BF' \perp TS \Rightarrow$ $d(BF', ND) = TS$	1p
$A_{TND} = A_{MNDQ} - A_{MNT} - A_{TQD}$, $\quad A_{MNDQ} = \frac{(QD+MN)\cdot MQ}{2}$	1p
$MN = l, QD = \frac{3l}{2}, MQ = \frac{l\sqrt{6}}{2}, ND = \frac{l\sqrt{7}}{2}, MT = TQ = \frac{l\sqrt{6}}{4}$	1p
$A_{MNDQ} = \frac{5l^2\sqrt{6}}{8}, A_{MNT} = \frac{MT\cdot MN}{2} = \frac{l^2\sqrt{6}}{8}, A_{TQD} = \frac{TQ\cdot QD}{2} = \frac{3l^2\sqrt{6}}{16}$ $\Rightarrow A_{TND} = \frac{5l^2\sqrt{6}}{16}$, $TS = \frac{5\cdot l\cdot\sqrt{42}}{28}$, adică $TS = \frac{15\cdot\sqrt{42}}{7}$	2p
TOTAL	**7p**

Problema 4	
Vom demonstra că din mulțimea $B = \{1,2,3,\dots,11\}$ maxim 5 numere pot fi în S. Considerăm următoarea partiție a lui B: $\{1,5\}, \{2,9\}, \{3,7\}, \{4,11\}, \{6,10\}, \{8\}$.	1p
Dacă luăm 6 elemente din B, rezultă că ar trebui să luăm câte un element din fiecare mulțime. $8 \in S \Rightarrow 1 \notin S \Rightarrow 5 \in S \Rightarrow 9 \notin S \Rightarrow 2 \in S \Rightarrow 6 \notin S \Rightarrow$ $10 \in S \Rightarrow 3 \notin S \Rightarrow 7 \in S \Rightarrow 11 \notin S \Rightarrow 4 \in S \Rightarrow 8 \notin S$ Fals	1p
Vom avea maxim 11 elemente din orice 11 elemente consecutive. Cele 5 numere pot fi luate de forma: $11\cdot k+1$, $11\cdot k+3$, $11\cdot k+4$, $11\cdot k+6$, $11\cdot k+9$.	1p
Din mulțimea $\{1,2,3,\dots,15\}$ maxim 8 sunt în S, deoarece considerăm partiția $\{1,8\}, \{2,9\}, \{3,7\}, \{4,11\}, \{5,12\}, \{6,13\}, \{10,14\}, \{15\} \Rightarrow$ nu putem avea 9.	2p
$2017 = 11\cdot 182 + 15 \Rightarrow$ avem maxim $5\cdot 182 + 8 = 918$	1p
Un exemplu de 8 elemente din 15 este 3, 5, 6, 8, 11, 14, 16, 17, iar exemplu de 5 cu 918 este: $S = \{\underbrace{1,3,4,6,9}, \underbrace{12,14,15,17,20}, \dots, \underbrace{1995,1997,1998,2000,2003}\}$	1p
TOTAL	**7p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2020

Clasa a IX-a

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale astfel încât $a_1 = 1$.
a) Arătaţi că există $k > 1$ astfel încât a_k să fie pătrat perfect.
b) Arătaţi că progresia conţine o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte.
c) Daţi un exemplu de progresie aritmetică de numere naturale care nu conţine niciun pătrat perfect.

2. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = \frac{1}{4}$ și $\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} = \frac{2}{n^2+2n}, n \geq 1$.
Să se arate că $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)x_k < 1$, oricare ar fi $n \geq 1$.

3. Fie $x, y, z > 0$. Demonstraţi că

$$\frac{x^3+3}{y+z} + \frac{y^3+3}{z+x} + \frac{z^3+3}{x+y} \geq \frac{9}{2} \cdot \frac{x+y+z+1}{x+y+z}.$$

4. Fie ABC un triunghi, D piciorul înălțimii din A, G centrul de greutate al triunghiului ABC și S piciorul bisectoarei din D în triunghiul ADB. Dreapta SG taie latura AC în punctul T. Să se arate că $AD = BC$ dacă și numai dacă $\sphericalangle ADT \equiv \sphericalangle TDC$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

BAREM DE CORECTARE

Clasa a IX-a

Problema 1	
a) Rația r este un număr natural. Pentru $k = r + 3$obținem $a_k = (r+1)^2$, care este pătrat perfect b) Pentru orice număr natural m, luând $k = m^2r + 2m + 1$ avem $a_k = 1 + (k-1)r = m^2r^2 + 2mr + 1 = (mr+1)^2$, care este pătrat perfect c) Știind că orice pătrat perfect este de forma $3A$ sau $3A+1$, este suficient să luăm, de exemplu, progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = 3n+2, n \in \mathbb{N}$. (Orice alt exemplu corect se punctează cu 2p)	1p 2p 2p 2p
TOTAL	**7p**
Problema 2	
Demonstrarea relației $x_n = \frac{1}{n^2\cdot(n+1)^2}, \forall n \geq 1$ Finalizare: $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)x_k = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)\cdot\frac{1}{k^2\cdot(k+1)^2} =$ $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1.$	4p 3p
TOTAL	**7p**
Problema 3	
$x^3 + 2 \geq 3x, \forall x > 0$, fiind echivalentă cu $(x-1)^2(x+2) \geq 0$. Rezultă $\frac{x^3+2}{y+z} + \frac{y^3+2}{z+x} + \frac{z^3+2}{x+y} \geq 3\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right)$. Cu notațiile $y + z = a > 0, z + x = b > 0, x + y = c > 0$ avem $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 3\right) \geq \frac{1}{2}\cdot(6-3) \geq \frac{3}{2}$, deci $\frac{x^3+2}{y+z} + \frac{y^3+2}{z+x} + \frac{z^3+2}{x+y} \geq 3\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right) \geq \frac{3}{2}$. (1) Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski, forma Titu Andreescu, avem: $\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{(1+1+1)^2}{2(x+y+z)} = \frac{9}{2(x+y+z)}$.(2) Adunând relațiile (1) și (2) obținem concluzia.	2p 2p 2p 1p
TOTAL	**7p**
Problema 4	
Fie $AD = x, BD = y, DC = z, \frac{AT}{TC} = \alpha$. Din teorema bisectoarei în triunghiul $ADB, \frac{AS}{SB} = \frac{x}{y}, \overrightarrow{AS} = \frac{x}{y}\cdot\overrightarrow{SB}$ și $\overrightarrow{GS} = \frac{y\cdot\overrightarrow{GA} + x\cdot\overrightarrow{GB}}{x+y}$. (1) $\overrightarrow{GT} = \frac{\overrightarrow{GA} + \alpha\cdot\overrightarrow{GC}}{1+\alpha}$ și $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ implică $\overrightarrow{GT} = \frac{(1-\alpha)\cdot\overrightarrow{GA} - \alpha\cdot\overrightarrow{GB}}{1+\alpha}$.(2) $\overrightarrow{GS} \parallel \overrightarrow{GT}$, $\overrightarrow{GA} \nparallel \overrightarrow{GB}$, deducem din (1) și (2) că $\frac{y}{1-\alpha} = \frac{x}{-\alpha}$, deci $\alpha = \frac{x}{x-y}$.(3) Dacă $AD = BC \Longrightarrow x - y = z$, $\alpha = \frac{x}{z}$ și, din reciproca teoremei bisectoarei în triunghiul ADC, $\sphericalangle ADT \equiv \sphericalangle TDC$. Reciproc, dacă $\sphericalangle ADT \equiv \sphericalangle TDC$, cu teorema bisectoarei în triunghiul ADC și relația (3) rezultă că $\alpha = \frac{x}{z} = \frac{x}{x-y}$ de unde $x - y = z$, adică $AD = BC$.	2p 2p 1p 1p 1p
TOTAL	**7p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2020

Clasa a X-a

1. a) Exprimați numărul $\log_{80} 3072$ în funcție de $a = \log_2 3$ și $b = \log_2 5$.
b) Calculați partea întreagă a numărului real $x = 19 \cdot \log_2 3$.

2. Se consideră numerele complexe x, y, z având fiecare modulul egal cu 1 şi expresia $E(x,y,z) = |x+y-z| + |x-y+z| + |-x+y+z|$.
a) Demonstraţi că $E(x,y,z) \geq 3$.
b) Aflaţi valoarea maximă a expresiei $E(x,y,z)$.

3. Fie a, b, c, d patru numere reale astfel încât $a > c > d > b > 1$ și $a \cdot b > c \cdot d$. Studiaţi injectivitatea functiei $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = a^x + b^x - c^x - d^x$.

4. Să se rezolve în $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sistemul:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = z \\ 2 \cdot \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+y^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot z \end{cases}$$

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

BAREM DE CORECTARE

Clasa a X-a

Problema 1	
a) $\log_{80} 3072 = \frac{\log_2 3072}{\log_2 80}$	1p
$= \frac{\log_2 3 + 10}{\log_2 5 + 4} = \frac{a+10}{b+4}$	1p
b) $3072 < 3125 \Leftrightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Longrightarrow 2^{30} \cdot 3 < (5 \cdot 2^4)^5 = 80^5 < 81^5 = 3^{20}$,	2p
de unde $2^{30} < 3^{19} \Leftrightarrow x = 19 \cdot \log_2 3 > 30$	1p
$(3^5)^3 < (2^8)^3$ şi $3^4 < 2^7$	1p
Înmulţind, apoi logaritmând în baza 2, $x < 31$. $[x] = 30$	1p
TOTAL	**7p**
Problema 2	
a) Avem inegalitatea : $\lvert x+y-z\rvert + \lvert x-y+z\rvert \geq \lvert x+y-z+x-y+z\rvert = 2 \cdot \lvert x\rvert = 2$.	1p
Scriind şi alte două inegalităţi analoage şi adunând cele trei inegalităţi se obţine inegalitatea cerută.	1p
b) Notăm $s = x+y+z$. Conform inegalităţii Cauchy – Buniakowski-Schwarz avem: $(\lvert s-2x\rvert + \lvert s-2y\rvert + \lvert s-2z\rvert)^2 \leq 3 \cdot (\lvert s-2x\rvert^2 + \lvert s-2y\rvert^2 + \lvert s-2z\rvert^2)$	1p
Dar $\lvert s-2x\rvert^2 + \lvert s-2y\rvert^2 + \lvert s-2z\rvert^2 = (s-2x)\cdot(\bar{s}-2\bar{x}) + (s-2y)\cdot(\bar{s}-2\bar{y}) + (s-2z)\cdot(\bar{s}-2\bar{z}) = 3\lvert s\rvert^2 - 2(s\cdot\bar{s} + \bar{s}\cdot s) + 12 = -\lvert s\rvert^2 + 12 \leq 12.$	2p
Din ultimele două inegalităţi rezultă $(\lvert s-2x\rvert + \lvert s-2y\rvert + \lvert s-2z\rvert)^2 \leq 3 \cdot 12 = 36$, de unde $E(x,y,z) = \lvert s-2x\rvert + \lvert s-2y\rvert + \lvert s-2z\rvert \leq 6$	1p
$6 = E\left(-1, \frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, deci $\max E = 6$	1p
TOTAL	**7p**
Problema 3	
$f(x) = a^x - c^x + b^x - \frac{b^x \cdot a^x}{c^x} + \frac{b^x \cdot a^x}{c^x} - d^x$	2p
$= b^x \cdot \left(\frac{a^x}{b^x} - \frac{c^x}{b^x} + 1 - \frac{a^x}{c^x}\right) + d^x \cdot \left(\frac{b^x \cdot a^x}{c^x \cdot d^x} - 1\right)$	1p
$= b^x \cdot \left[\left(\frac{a}{c}\right)^x - 1\right] \cdot \left[\left(\frac{c}{b}\right)^x - 1\right] + d^x \cdot \left[\left(\frac{a \cdot b}{c \cdot d}\right)^x - 1\right]$	1p
Funcţia f este o sumă de produse de funcţii strict crescătoare, cu valori pozitive, deci o funcţie strict crescătoare.	2p
Rezultă că f este o funcţie injectivă.	1p
TOTAL	**7p**
Problema 4	
$2 \cdot \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+y^2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})$ (1), deci dacă $x = 0$, atunci $y = 0$ şi $z = 0$.	1p
Aplicând inegalitatea lui Jensen funcţiei concave $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(t) = \sqrt{t}$ obţinem succesiv $\sqrt{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{x+y} \geq \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})$ $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}, \; \sqrt{x^2+y^2} \geq \frac{x+y}{\sqrt{2}}$	

şi sumând $\Longrightarrow 2\cdot\sqrt{x+y}+\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})+\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ (4) Ridicând la pătrat prima ecuaţie a sistemului $\Longrightarrow \sqrt{x\cdot y}\in\mathbb{N}\Longrightarrow x\cdot y$ este pătrat perfect. Dacă $x=1\Rightarrow y=k^2, k\in\mathbb{N}$ şi (1) nu se verifică. Analog pentru $x=2$ sau $x=3$. Dacă $x\geq 4$ şi $y\geq 4\Longrightarrow x\geq 2\cdot\sqrt{x}$ şi $y\geq 2\cdot\sqrt{y}\Longrightarrow x+y\geq 2\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ (5) Din relaţiile (4) şi (5) $\Longrightarrow 2\cdot\sqrt{x+y}+\sqrt{x^2+y^2}\geq 2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ (6) Din (1) şi (6) $\Longrightarrow$ x = $2\cdot\sqrt{x}$ şi $y=2\cdot\sqrt{y}\Longrightarrow x=4$ şi $y=4\Longrightarrow$ z = 4.	2p 1p 1p 1p 1p
TOTAL	**7p**

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2020

Clasa a XI-a

1. a)Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.Să se determine matricea A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin condițiile $x_1 = 1$, $x_{n-1} = \frac{x_n}{1-x_n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln x_n + \frac{1}{n}\cdot \ln n!\right)$.

2. Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice care verifică relația $X^3 + X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $\det(X^2 + I_2) > 0$.

b) Să se determine matricea X.

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 \in (0,1)$ și $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$, pentru $n \geq 1$. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n$.

4. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k}{n^2} + \cos\frac{\sqrt{k}}{n}\right)$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

BAREM DE CORECTARE

Clasa a XI-a

Problema 1

a) $A = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$	1p
$A^n = (\sqrt{2})^n \cdot \begin{pmatrix} \cos(n\frac{\pi}{4}) & \sin(n\frac{\pi}{4}) & 0 \\ -\sin(n\frac{\pi}{4}) & \cos(n\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{\sqrt{2}}{2})^n \end{pmatrix}$	2p
b)Relația de recurență se scrie: $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} + 1,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Cum $x_1 = 1 > 0$, prin inducție concluzionăm că $x_n > 0,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$.	1p
Din $\frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_{k-1}} + 1,\ (\forall)\, k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$, dând valori lui k, obținem: $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_1} + n - 1 \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{n}$.	1p
Limita din enunț se scrie: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln x_n + \frac{1}{n}\cdot\ln n!\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\ln n!\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{n}\cdot\sqrt[n]{n!}\right) = \ln\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.	1p
Folosind criteriul raportului obținem $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$.	
Concluzie: $\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n + \frac{1}{n}\cdot\ln n!\right) = \ln\frac{1}{e} = -1$.	1p
TOTAL	**7 p**

Problema 2

a) $\det(X^2 + I_2) \geq 0$	1p
$\det(X^2 + I_2) \neq 0$	1p
b) $\det X = 0$	1p
$X^3 = (tr(X))^2 \cdot X$	1p
$tr(X^3 + X) = tr^3X + trX$	1p
$trX = 2$	1p
Finalizare : $X = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$	1p
TOTAL	**7 p**

Problema 3

a) $a_n \in (0,1)$, orice $n \in \mathbb{N}^*$	1p
$a_{n+1} \le a_n$	1p
$l = 2^l - 1$ are doar soluțiile $l_1 = 0$ și $l_2 = 1$	1p
$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	1p
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{a_n}-1}{a_n} = \ln 2$	1p
c) $x_n = n \cdot a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$	1p
Finalizare : $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$	1p
TOTAL	**7 p**

Problema 4

$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\sin\frac{k}{n^2} + \cos\frac{\sqrt{k}}{n}\right) = e^{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sin\frac{k}{n^2} + \cos\frac{\sqrt{k}}{n}\right)}$	1p
$f(x) = \ln(\sin x + \cos\sqrt{x}) \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$	1p
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}} = \frac{1}{2}$	2p
$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$	1p
$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{4}$	1p
Finalizare : $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{4}}$	1p
TOTAL	**7p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
8 februarie 2020

Clasa a XII-a

1. a) Demonstrați că pentru orice număr real x are loc relația: $e^x \geq x + 1$.
b) Demonstrați inegalitatea $\int_0^1 \sqrt{x \cdot e^{-x^2}}\, dx < \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

2. Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \cdot \int_1^n \frac{\ln x}{x^2+n} dx = \frac{\pi}{4}$.

3. a) Fie $\varepsilon \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ care verifică relația $\varepsilon^3 = 1$. Demonstrați că numărul $(a + b \cdot \varepsilon) \cdot (a - b - b \cdot \varepsilon)$ este real pentru oricare $a, b \in \mathbb{R}$.
b) Să se arate că mulțimea $M = \{a^2 - ab + b^2 | a, b \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea.

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu n elemente, unde $n = 12k + 10, k \in \mathbb{N}$. Știind că aplicația $f: G \to G, f(x) = x^4$ este morfism de grupuri, arătați că grupul este abelian.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7puncte.
Timp de lucru: 3 ore

BAREM DE CORECTARE

Clasa a XII-a

Problema 1	
a)Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^x-x-1$ derivabilă, $g':\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g'(x)=e^x-1$.	1p
x: $-\infty$ … 0 … $+\infty$; $g'(x)$: $-------0++++++++$; $g(x)$: $\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\searrow\ 0\ \nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$	1p
b)Aplicând forma integrală a inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem $\int_0^1 \sqrt{x\cdot e^{-x^2}}\,dx \le \sqrt{\int_0^1 x\,dx\cdot\int_0^1 e^{-x^2}\,dx}$. (1)	1p
Din $e^x \ge x+1, \forall x\in\mathbb{R}$ rezultă $e^{-x^2}\le \frac{1}{x^2+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.	1p
Integrând pe intervalul $[0,1]$ rezultă $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le \frac{\pi}{4}$.	1p
$\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$,	1p
Din (1), avem $\int_0^1 \sqrt{x\cdot e^{-x^2}}\,dx \le \sqrt{\int_0^1 x\,dx\cdot\int_0^1 e^{-x^2}\,dx} \le \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.	1p
TOTAL	**7p**

Problema 2	
Schimbarea de variabilă $x=\frac{n}{y}\Rightarrow \int_1^n \frac{\ln x}{x^2+n}dx=\int_1^n \frac{\ln n}{y^2+n}dy-\int_1^n \frac{\ln y}{y^2+n}dy$, de unde $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2+n}dx=\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\sqrt{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	4p
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\cdot\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\sqrt{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\operatorname{arctg}\sqrt{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{\pi}{4}$	3p
TOTAL	**7p**

Problema 3	
a)Fie $\varepsilon\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ cu $\varepsilon^3=1$. Atunci $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0, \varepsilon^2=\bar{\varepsilon}$.	1p
$(a+b\cdot\varepsilon)(a-b-b\cdot\varepsilon)=(a+b\varepsilon)\cdot(a+b\varepsilon^2)=$ $=(a+b\varepsilon)\cdot\overline{(a+b\varepsilon)}=\lvert a+b\varepsilon\rvert^2\in\mathbb{R}, \forall a,b\in\mathbb{R}$	2p
b)Oricare ar fi $x,y\in M$ există $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x=a^2-ab+b^2=\lvert a+b\varepsilon\rvert^2$ și $y=c^2-cd+d^2=\lvert c+d\varepsilon\rvert^2$.	1p
$x\cdot y=\lvert(a+b\varepsilon)\cdot(c+d\varepsilon)\rvert^2=\lvert ac+(ad+bc)\varepsilon+bd\varepsilon^2\rvert$, de unde, dacă	1p
ținem seama că $\varepsilon^2=-\varepsilon-1$, avem $x\cdot y=\lvert ac-bd+(ad+bc-bd)\varepsilon\rvert^2=(ac-bd)^2-(ac-bd)\cdot(ad+bc-bd)+(ad+bc-bd)^2$ care aparține lui M deoarece $ac-bd, ad+bc-bd\in\mathbb{Z}$.	2p
TOTAL	**7p**

Problema 4	
$ord\ G = n = 12k + 10, k \in \mathbb{N}$ conform teoremei lui Lagrange $\Rightarrow \forall x \in G,\ x^{12k+10} = e$, e elementul neutru al lui G.	1p
De aici $x^{12k+12} = x^2, x^{12k+9} = x^{-1}, \forall x \in G$.(1)	1p
$f: G \to G, f(x) = x^4$ morfism de grupuri, deci $\forall x, y \in G$ $(xy)^4 = x^4y^4 \Rightarrow (yx)^3 = x^3y^3 \Rightarrow (yx)^4 = yx^4y^3 \Rightarrow y^4x^4 = yx^4y^3 \Rightarrow$ $y^3x^4 = x^4y^3$, apoi	1p
$x^2y^{-1} = x^{12k+12}y^{12k+9} = (x^{3k+3})^4(y^{4k+3})^3 = (y^{4k+3})^3(x^{3k+3})^4 =$ $y^{-1}x^2$, deci $x^2y = yx^2, \forall x, y \in G$.	2p
$(xy)^2 = (xy)^{12k+12} = [(xy)^4]^{3k+3} = (x^4y^4)^{3k+3} = x^4y^4x^4y^4 \ldots x^4y^4 =$ $= x^{12k+12}y^{12k+12} = x^2y^2 \Rightarrow xy = yx, \forall x, y \in G$	2p
TOTAL	**7p**