

(2p)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi) = \int_0^1 f(x) dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 = a.$$

(1p)

Transformăm șirul  $(b_n)_{n \geq 1}$ , astfel:

...

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \frac{1}{n+\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}} \right).$$

Vom considera deci funcția  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$ , și pentru fiecare  $n \geq 1$ , formăm diviziunea echidistantă  $\Delta'_n$  a intervalului  $[0, 1]$  de forma:

$$\Delta'_n = \left( x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < \dots < x_k = \frac{k}{n} < \dots < x_n = \frac{n}{n} = 1 \right),$$

de normă  $\|\Delta'_n\| = \frac{1}{n}$ , iar în fiecare interval  $[x_{k-1}, x_k]$  se alege punctul intermediar de forma:

$$\xi'_k = \frac{\sqrt{k^2-1}}{n}. \text{ Suma Riemann asociată funcției } f, \text{ diviziunii } \Delta'_n \text{ și punctelor intermediare } \xi'_k$$

este:

$$\sigma(\Delta'_n, \xi') = \sum_{k=1}^n f(\xi'_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{k^2-1}}{n}} \cdot \left( \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{k^2-1}} = b_n.$$

(2p)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \frac{1}{n+\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta'_n}(f, \xi') = \\ &= \int_0^1 f(x) dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 = b. \end{aligned}$$

(1p)

Deci  $a = b$ .

...

(1p)

$$4. \text{ Notăm } x = \frac{t+1}{t-1} \text{ și rezultă că } dx = -\frac{2}{(t-1)^2} dt \quad (2p)$$

$$I = \int_3^2 \frac{\ln\left(\frac{t+1}{t-1} - 1\right)}{\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2 + 1} \cdot \frac{-2}{(t-1)^2} dt = \int_2^3 \frac{\ln\left(\frac{2}{t-1}\right)}{t^2 + 1} dt = \int_2^3 \frac{\ln 2 - \ln(t-1)}{t^2 + 1} dt = \quad (2p)$$