

Soluții clasa a XII-a:

Pentru orice altă soluție corectă se acordă punctaj maxim corespunzător.

1. a) Asociativitatea rezultă imediat din calcul.

(2p)

b) Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem: $a * x = a \Leftrightarrow -ax + 2a + 2x - 2 = a \Leftrightarrow \Leftrightarrow a(1 - x) - 2(1 - x) = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Cum legea este comutativă avem și $x * 2 = 2$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

(3p)

c) Ținând cont de asociativitatea legii, precum și de rezultatul punctului b), obținem:

$$\frac{1}{2016} * \frac{2}{2016} * \dots * \frac{4031}{2016} * \frac{4032}{2016} = \frac{1}{2016} * \frac{2}{2016} * \dots * \underbrace{\frac{4031}{2016} * 2}_{=2} = \dots = 2.$$

(2p)

2. a) Presupunem că inelul $(A, +, \cdot)$ ar avea divizori ai lui zero.

(1p)

Rezultă că $\exists a, b \in A - \{0, 1\}$ astfel încât $a \cdot b = 0$. Din relația $ababa = a \Leftrightarrow (ab)(aba) = a \Leftrightarrow 0 = a, \forall a \in A - \{0, 1\}$, imposibil deoarece $\text{card } A \geq 3 \Rightarrow$ inelul

$(A, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui zero.

(1p)

b) $\forall a \in A - \{0, 1\} \Rightarrow ababa = a \Leftrightarrow a(baba - 1) = a, a \neq 0$ și deci $baba = 1$. Dacă luăm $a = b \Rightarrow a^4 = 1, \forall a \in A - \{0, 1\} \Leftrightarrow a \cdot a^3 = a^3 \cdot a = 1, \forall a \in A - \{0, 1\} \Rightarrow$ elementul a este inversabil și deci: $(*) a^4 - 1 = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$.

(1p)

Au loc următoarele cazuri:

I. Dacă $-1 \neq 1$, fie $b = -1$ în relația inițială rezultă $a^3 = a \Rightarrow a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow \Rightarrow a^2 = 1, \forall a \in A - \{0\} \Rightarrow (a - 1)(a + 1) = 0$ și cum $a - 1 \neq 0 \Rightarrow a = -1$. În acest caz $A = \{0, 1, -1\}$ este un corp cu trei elemente.

(2p)

II. Dacă $-1 = 1 \Rightarrow 1 + 1 = 0$, iar din $(*)$ deducem că $a^2 = -1$ sau $a^2 = 1 \Rightarrow \Rightarrow (a - 1)(a + 1) = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$, fals. Deci inelul $(A, +, \cdot)$ este corp comutativ cu trei elemente.

(2p)

3. Transformăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, astfel:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right).$$

Vom considera funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$, și pentru fiecare $n \geq 1$, formăm diviziunea echidistantă Δ_n a intervalului $[0, 1]$ de forma:

$$\Delta_n = \left(x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < \dots < x_k = \frac{k}{n} < \dots < x_n = \frac{n}{n} = 1 \right),$$

de normă $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n}$, iar în fiecare interval $[x_{k-1}, x_k]$ se alege punctul intermediar de forma:

$\xi_k = \frac{k}{n}$. Suma Riemann asociată funcției f , diviziunii Δ_n și punctelor intermediare ξ_k este:

$$\sigma(\Delta_n, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \cdot \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = a_n.$$