

$$P(2): a_2 = \frac{1}{2}$$

$$P(k): a_k = \frac{(k-1) \cdot (k-1)!}{k},$$

$$P(k+1): a_{k+1} = \frac{(k) \cdot (k)!}{k+1}.$$

(3p)

Înlocuind în relația de recurență $n = k$ obținem:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k}{k+1} &= \frac{a_{k+1}}{k} \Rightarrow \frac{1 + 1 + \dots + (k-1)(k-1)!}{k+1} = \frac{a_{k+1}}{k} \Rightarrow a_{k+1} \\ &= \frac{k}{k+1} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} i \cdot i! \right) = \frac{k}{k+1} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{k-1} (i+1)! - i! \right) \\ &= \frac{k}{k+1} \cdot k!. \end{aligned}$$

(2p)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

(1p)

4. a) Din ipoteză rezultă că $f(0) = 0$. Presupunând prin absurd că ar exista $t \neq 0$ astfel ca $f(t) = t$, atunci înlocuim $x = t$ în relația din ipoteză și obținem $a \geq 1$, ceea ce contrazice faptul că $a \in (0,1)$.

(2p)

b) Pentru $x = f(x)$ relația dată în enunț devine:
 $|f(f(x))| \leq a \cdot |f(x)| \leq a^2 \cdot |x|, (\forall)x \in \mathbf{R}$. Continuăm raționamentul și obținem:
 $|f(f(f(x)))| \leq a^2 \cdot |f(x)| \leq a^3 \cdot |x|, (\forall)x \in \mathbf{R}$.

(1p)

Așadar: $|g_2(x)| \leq a^2 \cdot |x|, |g_3(x)| \leq a^3 \cdot |x|, (\forall)x \in \mathbf{R}$. Prin inducție matematică rezultă că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem: $|g_n(x)| \leq a^n \cdot |x|, (\forall)n \in \mathbf{N}^*$.

(1p)

Atunci $|g_n(2016)| \leq 2016 \cdot a^n, (\forall)n \geq 1$ și cum $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ (deoarece

$a \in (0,1)$), rezultă că: $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(2016) = 0$.

(1p)

c) Din ipoteză avem $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ și $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq a, (\forall)x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; atunci prima limită cerută este în cazul de nedeterminare $\left[\frac{0}{0} \right]$. Avem:

$$\left| \frac{(f(x))^2}{x} \right| = |f(x)| \cdot \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq a \cdot |f(x)|, (\forall)x \neq 0,$$

de unde rezultă: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x))^2}{x} = 0$.

(1p)

De asemenea avem: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (f(x))^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \left(1 - \frac{(f(x))^2}{x} \right) = 1$.

(1p)