

## Soluții clasa a XI-a:

Pentru orice altă soluție corectă se acordă punctaj maxim corespunzător.

1. Matricea dată o scriem sub forma  $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ , unde  $x = \frac{\pi}{3}$ . Atunci

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}$$

și prin inducție matematică se obține:

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}, (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

(4p)

Din condiția

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ obținem: } \cos \frac{n\pi}{3} = 1 \text{ și } \sin \frac{n\pi}{3} = 0. \text{ Deoarece } n \leq 20, \text{ rezultă } n \in \{0, 6, 12, 18\}.$$

(3p)

2. Cazul I:  $a_{kk} \neq 0$ .

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{kk}^{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \cdot a_{kk} & a_{12} \cdot a_{kk} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \cdot a_{kk} \\ a_{21} \cdot a_{kk} & a_{22} \cdot a_{kk} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \cdot a_{kk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} \cdot a_{kk} & a_{k2} \cdot a_{kk} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \cdot a_{kk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \cdot a_{kk} & a_{n2} \cdot a_{kk} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \cdot a_{kk} \end{vmatrix}.$$

(2p)

Adunând la fiecare din coloanele de indice  $j = \overline{1, n}, j \neq k$  coloanele de indice  $j$  înmulțite cu  $(-a_{kj})$ , obținem:

$$\det A = \frac{1}{a_{kk}^{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k+k} \cdot a_{kk} \cdot \frac{1}{a_{kk}^{n-1}} \cdot \det B.$$

Deci pentru  $a_{kk} \neq 0$ ,  $\det B = a_{kk}^{n-2} \cdot \det A$ , iar  $\alpha = a_{kk}^{n-2}$ .

(2p)

Cazul II:  $a_{kk} = 0$ .

În acest caz  $b_{ij} = -a_{ik} \cdot a_{kj}$ , unde  $i, j = \overline{1, n}, j \neq k$ , fiecare două linii ale matricei  $B$  sunt proporționale. Deci pentru  $a_{kk} = 0$ ,  $\det B = 0 = 0 \cdot \det A$ , iar  $\alpha = 0$ .

(2p)

În concluzie  $\det B = a_{kk}^{n-2} \cdot \det A$ , iar  $\alpha = a_{kk}^{n-2}$ .

(1p)

3 Dăm valori lui  $n$ :  $n = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}, n = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{4}{3}$ .

(1p)

Demonstrăm prin inducție că:

$$a_n = \frac{(n-1) \cdot (n-1)!}{n}, (\forall) n \geq 2.$$