

Cum $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, rezultă $\overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0$, adică $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 0$, (**). (1p)

Din relațiile (*), (**) și faptul că z_1, z_2, z_3 au modulele egale cu 1, se obține imediat concluzia cerută. (1p)

b) Deoarece ε este rădăcină cubică a unității avem $\varepsilon^3 = 1$ și cum $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, deduce că $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. (1p)

Dar $|1| = |\varepsilon| = |\varepsilon^2| = 1$ și deci în egalitatea de la punctul a) putem alege

$z_1 = 1, z_2 = \varepsilon, z_3 = \varepsilon^2$ și astfel punctul b) este demonstrat. (2p)

3. a) Fie $a, b \in (0, 1)$, astfel încât $a < b$; atunci $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ și $\lg a < \lg b < 0$, de unde rezultă $\frac{\lg a}{a} < \frac{\lg a}{b} < \frac{\lg b}{b}$, adică f este strict crescătoare. (3p)

b) Logaritmăm ambii membri ai ecuației în baza zece și obținem

$f(\sin x) = f(\cos x)$, unde f este funcția de la punctul a). (2p)

Deoarece f este strict crescătoare, rezultă că f este injectivă (1p)

și atunci $\sin x = \cos x$ și cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x = \frac{\pi}{4}$. (1p)

4. Deoarece $x - 1 \leq \frac{x^2}{4}$, $(\forall) x > 1$, cu egalitate numai pentru $x = 2$, prin logaritmare în baza x , obținem: $\log_x(x - 1) \leq 2 \left(1 - \frac{1}{\log_2 x}\right)$ (*), cu egalitate dacă și numai dacă $x = 2$.

Analog, $\log_y(y - 1) \leq 2 \left(1 - \frac{1}{\log_2 y}\right)$, (**), cu egalitate dacă și numai dacă $y = 2$. (3p)

Prin adunarea relațiilor (*) și (**), rezultă

$$\log_x(x - 1) + \log_y(y - 1) \leq 2 \left(2 - \left(\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 y}\right)\right) \quad (1),$$

cu egalitate dacă și numai dacă $x = y = 2$. (1p)

Ținând cont de ipoteză și de (1), obținem: $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 y} \leq 2$, (2), cu egalitate dacă și numai dacă $x = y = 2$. (1p)

În ipoteza $x > 1, y > 1$, avem $\log_2 x > 0, \log_2 y > 0$ și atunci:

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 y} \geq \frac{4}{\log_2 x + \log_2 y}, \quad (3)$$

Cu egalitate dacă și numai dacă $x = y$

(am ținut cont că $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$, $(\forall) a, b > 0$). (1p)

Din (2) și (3) rezultă $xy \geq 4$ cu egalitate numai pentru $x = y = 2$. Cum $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ și

$xy \geq 4$, deducem că $x + y \geq 4$, cu egalitate dacă și numai dacă $x = y = 2$. (1p)