

Soluții la X-a:

Pentru orice altă soluție corectă se acordă punctaj maxim corespunzător.

1.a) Condiția de existență $x > 0$. Folosind formula $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, ecuația se mai scrie:

$$x^{\log_{24} 2 + \log_{24} 7} + x \cdot x^{\log_{24} 2} = x^{\log_{24} 2 + \log_{24} 25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{\log_{24} 2} \cdot x^{\log_{24} 7} + x \cdot x^{\log_{24} 2} = x^{\log_{24} 2} \cdot x^{\log_{24} 25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{\log_{24} 2} \cdot (x^{\log_{24} 7} + x - x^{\log_{24} 25}) = 0.$$

(1p)

Dar $x^{\log_{24} 2} \neq 0 \Leftrightarrow x^{\log_{24} 7} + x = x^{\log_{24} 25} \Leftrightarrow x^{\log_{24} 7} + x^{\log_{24} 24} = x^{\log_{24} 25} \Leftrightarrow$

$$7^{\log_{24} x} + 24^{\log_{24} x} = 25^{\log_{24} x}.$$

(1p)

Cu substituția $\log_{24} x = t, t \in \mathbb{R}$, ecuația se scrie:

$$7^t + 24^t = 25^t (*).$$

(1p)

$t = 2$ este soluția unică a ecuației (*), iar $x = 576$ este soluția ecuației din enunț.

(1p)

b) Din $a_i \in \mathbb{R}_+, i = \overline{1, n}$ și $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, deducem că

$$a_i \in (0, 1), \forall i = \overline{1, n}, \text{ iar } \log_{a_i} a_2, \log_{a_i} a_3, \dots, \log_{a_i} a_1 > 0.$$

(1p)

Notăm cu $E = \frac{\log_{a_1}^2 a_2}{\log_{a_1}^2 a_3} + \frac{\log_{a_1}^2 a_3}{\log_{a_1}^2 a_2} + \dots + \frac{\log_{a_1}^2 a_n}{\log_{a_1}^2 a_1} + \frac{\log_{a_1}^2 a_1}{\log_{a_1}^2 a_n}.$

$$E = \frac{n^2}{1} \cdot n^2 \cdot E =$$

$$= \frac{n^2}{1} \cdot \left[\left(\frac{\log_{a_1}^2 a_2}{\log_{a_1}^2 a_3} + \left(\frac{\log_{a_1}^2 a_3}{\log_{a_1}^2 a_2} + \dots + \left(\frac{\log_{a_1}^2 a_n}{\log_{a_1}^2 a_1} + \left(\frac{\log_{a_1}^2 a_1}{\log_{a_1}^2 a_n} \right) \right) \right) \right] \right]$$

$$\cdot \left[\left(\sqrt[n]{na_1 + (n-1)} \right)^2 + \left(\sqrt[n]{na_2 + (n-1)} \right)^2 + \dots + \left(\sqrt[n]{na_n + (n-1)} \right)^2 \right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{1} \cdot \left(\log_{a_1} a_2 + \log_{a_1} a_3 + \dots + \log_{a_1} a_n \right)^2 \geq \frac{n^2}{1} \cdot \left(n \cdot \sqrt[n]{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_1} a_3 \cdot \dots \cdot \log_{a_1} a_n} \right)^2 = \frac{n^2}{1} \cdot n^2 = 1,$$

unde pentru finalizarea exercițiului din enunț s-a folosit inegalitatea

Cauchy-Buniakovski-Schwarz și inegalitatea medilor.

(2p)

2. a) Notăm cu S membrul stâng al egalității ce trebuie demonstrată și folosind formula

$$n \cdot \overline{n} = |n|^2, (\forall) n \in \mathbb{C}, \text{ obținem :}$$

$$S = \sum (z - z_1)(\overline{z} - \overline{z_1}) = \sum (|z|^2 + |z_1|^2 - z \cdot \overline{z_1} - \overline{z_1} \cdot z).$$

Scriem suma desfășurată și avem:

$$S = 3 \cdot |z|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - z(z_1 + \overline{z_2} + \overline{z_3}) - \overline{z}(z_1 + z_2 + z_3). (*)$$

(2p)