

$$3. a) a_2 = \frac{5+3}{10+3} = 2, a_3 = \frac{2+3}{13} = \frac{5}{13}, b_1 = \frac{1+1}{1-3} = -1, b_2 = \frac{2+1}{2-3} = -\frac{1}{3}, b_3 = \frac{18}{-2} = -9.$$

(2p)

b) Pentru orice $n \geq 1$ avem: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1} \cdot \frac{a_{n-3}}{a_{n-6}} = \frac{6a_{n+6}}{2a_{n-6}} \cdot \frac{a_{n-3}}{a_{n+1}} = \frac{1}{3}$, ceea ce demonstrează că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică cu rația $\frac{1}{3}$.

(2p)

a) Conform punctului b), avem: $b_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $(A)n \geq 1, (*)$.

(1p)

Din relația dată în ipoteză, $b_n = \frac{a_{n-3}}{1-b_n}$, obținem $a_n = \frac{1-b_n}{b_{n+3}}$, $(A)n \geq 1$.

(1p)

Ținând cont de relația $(*)$ rezultă imediat că: $a_n = \frac{3^{n-1}}{3^{n-1}+1}$, $(A)n \geq 1$.

(1p)

4. Fie O_1, O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, DBC .
 AH_1BC și $DH_2BC \Rightarrow AH_1 \parallel DH_2$.
 Ținând cont de aceasta, $H_1H_2 \parallel AD \Leftrightarrow AH_1H_2D$ paralelogram

(1p)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{H_1H_2},$$

(1p)

H_2 ortocentrul triunghiului BCD atunci:

$$\overrightarrow{O_2H_2} = \overrightarrow{O_2B} + \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{O_2D} \text{ (Relația lui Sylvester)}$$

(1p)

$$\overrightarrow{r_{H_2}} - \overrightarrow{r_{O_2}} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_{O_2}} + \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_{O_2}} + \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_{O_2}} \Rightarrow \overrightarrow{r_{H_2}} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D} - 2\overrightarrow{r_{O_2}}$$

(2p)

$$\text{Deci, } H_1H_2 \parallel AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D} - 2\overrightarrow{r_{O_2}} - (\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_A} - 2\overrightarrow{r_{O_1}}) = \overrightarrow{AD} - 2(\overrightarrow{r_{O_2}} - \overrightarrow{r_{O_1}})$$

(1p)

$\Rightarrow O_2 = O_1 \Rightarrow ABCD$ inscripibil.