

Soluții clasa a IX-a:

Pentru orice altă soluție corectă se acordă punctaj maxim corespunzător.

1. a) Inducție matematică.

(2p)

b) Pentru $m = n = 1$ și notând $f(1) = k \in \mathbb{N}^*$ se obține
 $(1 + 3^k) \mid (k + 3)$, deci $3^k \leq k + 2$. Dar
 $3^k > k + 2, \forall k \geq 2 \Rightarrow f(1) = k = 1$.

(2p)

Pentru $m = 1$ obținem $(1 + 3^{f(n)}) \mid (1 + 3^n) \Rightarrow f(n) \leq n, \forall n \in \mathbb{N}^* (*)$.

(1p)

Pentru $n = 1$ obținem $(m + 3) \mid (f(m) + 3) \Rightarrow f(m) \geq m, \forall m \in \mathbb{N}^* (**)$.

(1p)

Din $(*)$, $(**)$ se obține $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(1p)

2. Deoarece media armonică a două numere pozitive este mai mică decât media lor aritmetică,

din relația dată în ipoteză obținem succesiv :

$$x_n < \frac{2}{\frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n+1}}}, (\forall) n \geq 1 \Rightarrow x_n - x_{n+1} < x_{n-1} - x_n, (\forall) n \geq 1.$$

(2p)

Deci:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &< x_0 - x_1 \\ x_2 - x_3 &< x_1 - x_2 \end{aligned}$$

$$x_{n-1} - x_n < x_n - x_{n+1}.$$

(1p)

Prin adunarea celor n inegalități obținem :

$$x_1 - x_n < x_0 - x_{n+1}, (\forall) n \geq 1 \Rightarrow x_1 - x_0 < x_n - x_{n+1}, (\forall) n \geq 1.$$

(1p)

În ultima relație se dau valori lui n de la 1 la $m, m \in \mathbb{N}^*$ și însumând cele m inegalități se obține: $m(x_1 - x_0) < x_1 - x_m < x_1, (\forall) m \geq 1$, unde s-a folosit faptul că $x_m > 0, (\forall) m \in \mathbb{N}$.

(1p)

Dacă se presupune prin absurd că $x_1 > x_0$, din relația anterioară se deduce că $m < \frac{x_1}{x_1 - x_0}, (\forall) m \geq 1$, ceea ce este fals, deoarece mulțimea numerelor naturale nu este mărginită superior. Așadar: $x_0 \geq x_1$.

(2p)

ALTFEL ! Se notează $\frac{1}{x_n} = y_n$ și relația din ipoteză devine:

$$y_{n-1} + y_{n+1} < 2y_n, (\forall) n \geq 1.$$

Se procedează în continuare ca în soluția de mai sus.